

20. KOLLOQUIUM MATHEMATIK-DIDAKTIK

DER

UNIVERSITÄT BAYREUTH

11.07.1991

INHALTSVERZEICHNIS

PROF. DR. G. PICKERT (UNIVERSITÄT GIESSEN):

"WAS SOLLTE BLEIBEN? NACHLESE ZUR MATHEMATIKUNTERRICHTS-
REFORM DER 60ER UND 70ER JAHRE"

PROF. DR. R. FRITSCH (UNIVERSITÄT MÜNCHEN):

"HISTORISCHE UND DIDAKTISCHE BEMERKUNGEN ZUM SATZ VON
BODENMILLER - STEINER"

PROF. DR. P. BAPTIST (UNIVERSITÄT BAYREUTH):

"ELEMENTARMATHEMATISCHE ÜBERLEGUNGEN ZUM GOLDENEN SCHNITT"

STUD. RER. NAT. A. MEINL (UNIVERSITÄT BAYREUTH):

"CHAOSTHEORIE IN DER PHYSIK"

Historische und didaktische Bemerkungen zum Satz von BODENMILLER - STEINER

Rudolf Fritsch

VORREDE

Verehrte Kolleginnen und Kollegen, Kommilitoninnen und Kommilitonen, meine Damen und Herren, lieber Herbert,

Es ist üblich, einen solchen Vortrag mit dem Dank an den Gastgeber zu beginnen. Nicht nur, weil dieses 20. Kolloquium Mathematik-Didaktik ein Jubiläumskolloquium im Sinne des Jubiläumsdienstalters darstellt, erlaube ich mir, diesen Dank etwas weiter auszuführen und auch auf andere Bereiche auszuweiten. Natürlich ehrt es mich besonders, wieder vor dieser Tafel zu stehen, nachdem ich schon beim ersten Bayreuther Kolloquium Mathematik-Didaktik am 12. Februar 1982 und beim Festkolloquium aus Anlaß des 60. Geburtstages von Herrn Zeitler am 4. November 1983 hier vorgetragen habe, und dafür danke ich herzlich. Aber ihr eigentliches Gewicht erhält diese Veranstaltung durch ein anderes Datum. Am 26. Juli wird Herr Zeitler 68 Jahre alt und infolgedessen zum Ende dieses Semesters emeritiert. Es ist also voraussichtlich das letzte Kolloquium dieser Art, das er in seiner Funktion als Inhaber des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik an der Universität Bayreuth organisiert hat und leitet. Die Eigentümlichkeit des Hochschullehrerberufes liegt jedoch darin, daß die Emeritierung keinen echten Abschied bedeutet. Der Professor wird nur entpflichtet, das heißt, von der Pflicht Vorlesungen zu halten, entbunden. Aber der Souverän, der das Hochschulrecht schafft, geht davon aus, daß ein Universitätsprofessor bis ans Lebensende untrennbar an seine Wissenschaft gekettet ist, und betrachtet ihn auch nach der Emeritierung als Mitglied der Hochschule mit der Möglichkeit zu Lehre und Forschung. So wie Herr Zeitler aussieht und so gesund wie er ist, dürfen wir hoffen und erwarten, daß er noch häufig im Hörsaal stehen und so manche für die Unterrichtsgestaltung anregende Arbeit aus seiner Feder fließen wird, verbunden mit der Fortsetzung seiner geometrischen und kombinatorischen Forschungen. Die Mathematik ist dafür wohl ein echter Junghbrunnen an Wissenschaft, wie wir es an vielen Beispielen sehen: So haben wir vor ein paar Wochen in Innsbruck den 100. Geburtstag des Topologen Leopold Vietoris gefeiert, der seinen Lebenslauf dabei persönlich in freier Ansprache, stehend, ohne Stock und Brille schilderte. Voriges Jahr hat Vietoris eine längere Arbeit zur Geometrie des Bergsteigens veröffentlicht, der sportlichen Tätigkeit, die ihn so rüstig erhalten hat. Da Du, lieber Herbert, dem gleichen Sport frönst, sind die Voraussetzungen geschaffen, daß Du das gleiche Alter in gleicher Vitalität erreichst. So ist der heutige Tag für Dich kein Abschluß, sondern nur ein Einschnitt, der zum Vorausschauen und Zurückblicken fordert. Zum Vorausschauen gehört der nachfolgende sachliche Teil, das Zurückblicken auf Deine bisherige Tätigkeit als Lehrer, Hochschullehrer und Forscher zeigt ein Leben, das viel Dank verdient, einen Dank, den ich sehr persönlich formulieren will, dem sich aber sicher viele in der einen oder anderen Form anschließen werden. Es ging mir ja mit Dir zunächst so, wie mit vielen andern Mathematikern: Zuerst war das Buch! Wenn ich als Referendar im Saarland erwähnte, daß ich in Bayern zur Schule ging, bekam ich häufig die Antwort: Das ist dort, wo die guten Schulbücher herkommen! Und als ich diese Bücher ansah, stand auf etlichen der Name Zeitler. Wir sind uns dann im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach persönlich begegnet, haben uns - wie man so sagt - die Tür in die Hand gegeben; Du reistest ab, ich kam an. Aber irgendwie haben wir sofort Sympathie für einander empfunden. Zunächst wurde die Bekanntschaft auf MNU-Tagungen und in Oberwolfach weiterentwickelt und gepflegt, wurde zur Freundschaft. Das schönste Zusammensein ergab sich jedoch bei einer sehr viel späteren Tagung, einem Gedenkkolloquium in Florenz vor drei Jahren. Zu besonderem Dank bin ich Dir für Deinen Rat verpflichtet, mich auf

die Nachfolge von Herrn Seebach an der Universität München zu bewerben. Obwohl ich damals sehr zögerte, so habe ich die Entscheidung in den 10 Jahren, die ich nun dort tätig bin, keine Sekunde bereut. Das liegt natürlich auch daran, daß es anregend, fruchtbar, angenehm und eine Freude war und hoffentlich bleiben wird, mit Dir zusammenzuarbeiten, auf der Grundlage ganz ähnlicher Ansichten über die Mathematik und ihre Didaktik, eine Didaktik, die darauf zielt, dem Lehrer und seinen Schülern Freude an einem inhaltsreichen Unterricht zu vermitteln. Auf die Begegnungen bei den Amtsgeschäften wie den Koordinierungssitzungen für die Auswahl der Staatsexamensklausuren zur Fachdidaktik will ich nicht im einzelnen eingehen. Ich möchte nur noch einen Punkt Deiner wissenschaftlichen Tätigkeit herausgreifen und mit einem ungewöhnlichen, vielleicht ungehörigen Appell an alle Anwesenden verbinden. Herr Zeitler gehört zu den Mitbegründern der Zeitschrift Didaktik der Mathematik, die jetzt im 19. Jahrgang erscheint. Seit 1984 gehöre auch ich dem wissenschaftlichen Beirat dieser Zeitschrift an und so klingt es vielleicht nach Eigenlob, wenn ich sage, daß sich der Beirat meines Erachtens erfolgreich bemüht, eine ansprechende, im täglichen Unterricht verwertbare Zeitschrift zu gestalten. Nur: der Erfolg spiegelt sich nicht in den Abonnentenzahlen wieder; der Grund liegt meiner Meinung nach nicht in der Qualität, sondern in den modernen Kopiermöglichkeiten und den knappen Mitteln, die den Schulen für solche Zwecke zur Verfügung stehen. Aber ich weiß nicht, wie lange der Verlag die Zeitschrift unter diesen Umständen noch tragen kann; es wäre jedoch ein großer Verlust, wenn unsere Zeitschrift - wie vor einigen Jahren das sehr attraktive Schülerheft mathe-plus - einginge. Deswegen bitte ich sie, liebe Kolleginnen und Kollegen, doch dafür Sorge zu tragen, daß an Ihrer Schule wenigstens einmal die Didaktik der Mathematik abonniert wird. Ich gestehe, daß ich absichtlich kein Manuskript meines nachfolgenden Vortrages verteile; ich hoffe, daß das Material in geschlossener Form in unserer Zeitschrift erscheinen kann. Sollte es mir gelingen, Ihr Interesse an dem Gegenstand zu wecken, so hoffe ich, daß es Sie noch einmal zur Bestellung ermuntert.

Nun muß ich jedoch mit meinem Dank an Dich zu Ende kommen, es fehlt nur noch etwas ganz Wesentliches. Daß wir so lange so gut in den abgehobenen Sphären unserer Wissenschaft zusammenarbeiten konnten, verdanken wir zu ganz großen Stücken Deiner temperamentvollen Frau Hermine, die Dir den Rücken von den kleinen Sorgen des Alltags freigehalten hat, aber immer auch um Deine Kollegen besorgt war, wie sich zum Beispiel in den schon genannten Florentiner Nächten zeigte. Für sie ist dieser Blumenstrauß, den ich Dir jetzt überreiche, damit Du Dich bis zur Weitergabe an ihm freuen kannst. Dich selbst begleiten meine besten Wünsche für das nun beginnende 3. Lebensdrittel.

*Es folgt eine Kurzfassung des Vortrags, ohne Figuren und Literatur. Eine ausführliche Darstellung mit zusätzlichen Beweisen, Figuren und Literaturliste wird 1992 in der Zeitschrift **Didaktik der Mathematik** erscheinen, die zu abonnieren dringend empfohlen wird.*

Trotz schlechter Rahmenbedingungen gelang es dem Mathematiklehrer CHRISTOPH GUDERMANN, während seiner Tätigkeit am Gymnasium Kleve ein interessantes Lehrbuch zur analytischen Geometrie auf der Kugel zu verfassen, das 1830 unter dem Titel *Grundriß der analytischen Sphärik* erschien. Es brachte ihm 1831 den Titel „Oberlehrer“ und ein Jahr später eine außerordentliche Professur an der Philosophisch Theologischen Akademie (seit 1902 Universität) in Münster; 1839 wurde er in Münster zum ordentlichen Professor ernannt.

Auf Seite 138 des genannten Buches findet man die folgende Anmerkung:

Der planimetrische Satz, daß sich die drei Kreise zweimal in Einem Punkte schneiden, welche über den drei Diagonalen eines ebenen Vierecks, als Durchmesser, beschrieben werden, ist schon sehr bemerkenswerth und mir von Herrn Bodenmiller hieselbst, der ihn gefunden hat, mündlich mitgetheilt worden. Es findet sich in den mir bekannten, vom Kreise handelnden, Werken nicht.

Der hier beschriebene geometrische Sachverhalt wird seitdem als „Satz von BODENMILLER“ bezeichnet. Unter Bezug auf diese Notiz von GUDERMANN stellten unter anderen AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790 - 1868), und neuerdings GUNTER WEISS in Wien, dazu Überlegungen an; dabei betrachtet WEISS die Situation unter Aspekten der darstellenden Geometrie und der Grundlagen der Geometrie. Auch sonst wird der mathematische Tatbestand in der Literatur erwähnt, so von OSKAR SCHLÖMILCH (1823 - 1901), MICHEL CHASLES (1793 - 1880), PAUL SERRET (1827 - 1898) und EDUARD STUDY (1862 - 1930); auf Teile der Überlegungen von SCHLÖMILCH und STUDY möchte ich später noch eingehen.

GUDERMANN selbst geht es natürlich an dieser Stelle seines Buches um den entsprechenden, wohl von ihm selbst gefundenen Satz der Geometrie auf der Kugel. In CRELLES Journal teilt er zusätzlich mit, daß man statt Kreisen ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen nehmen kann. Er gibt keinen weiteren Hinweis zur Person BODENMILLER; ein solcher findet sich auch nicht in der späteren Literatur. Eine Durchsicht der nicht verbrannten Jahresberichte des Gymnasiums Kleve aus den Jahren 1830 - 1833, für die ich Herrn van Eimern in Kleve danke, ergab auch keine Spur von BODENMILLER. Da sein Name untypisch für die Gegend ist, ist anzunehmen, daß er aus beruflichen Gründen, vielleicht als Geistlicher oder Justizbeamter nach Kleve verschlagen wurde. Weitere Spekulationen darüber anzustellen ist allerdings müßig. Eine Anfrage an das Stadtarchiv in Kleve erbrachte bisher kein Ergebnis.

Der Satz von BODENMILLER ist heute mit den Mitteln der Vektoralgebra schnell zu beweisen. Dieses von Hermann Graßmann (1809 - 1877) erfundene Werkzeug stand BODENMILLER noch nicht zur Verfügung; leider schreibt GUDERMANN nicht, wie BODENMILLER seine Behauptung begründet hat. Für das sphärische Analogon verwendet GUDERMANN trigonometrische Methoden; seine Verallgemeinerung auf Ellipsen gibt er ohne Beweis an.

Den vektoralgebraischen Beweis habe ich bei einem Unterrichtsversuch in einem Leistungskurs am Pestalozzi Gymnasium in München behandelt, für den eine Doppelstunde zur Verfügung stand. Den Einstieg bildete das Phänomen der Kopunktalität dreier mit einem Dreieck verbundener Geraden in der Ebene, etwa der drei Mittelsenkrechten oder der drei Winkelhalbierenden. Der Satz von BODENMILLER wurde als eine analoge Situation vorgestellt, wobei das Dreieck zum vollständigen Viereck und die drei Geraden zu den drei BODENMILLERSchen Kreisen in Beziehung gesetzt wurden.

Dabei wird die übliche Situation in zwei Richtungen verändert. Zum einen erhöht man von „drei“ auf „vier“, das heißt statt eines Dreiecks betrachten wir ein Vier...? - das gibt gleich das erste Problem. Ein Dreieck ist bestimmt durch drei Punkte in allgemeiner Lage, das sind drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, oder durch drei Geraden in allgemeiner Lage,

das sind drei Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen, aber von denen auch keine zwei zueinander parallel sind. So gibt es zwei äquivalente Charakterisierungen des (geradlinigen) Dreiecks in der Ebene. Was passiert aber, wenn man darin „drei“ durch „vier“ ersetzt? Unser heutige Sprachgebrauch für diese Situation geht auf JAKOB STEINER (1796 - 1863) zurück.

- *Vier Punkte in allgemeiner Lage* sind vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Je zwei von vier solchen Punkten haben eine Verbindungsgerade; das ergibt insgesamt sechs Geraden. Die ganze Konfiguration aus vier Punkten und sechs Geraden wird als (*vollständiges*) *Viereck* bezeichnet. Die Punkte sind die *Ecken*, die Verbindungsgeraden von je zwei Ecken die *Seiten* des Vierecks.
- *Vier Geraden in allgemeiner Lage* sind vier Geraden, von denen keine drei durch einen Punkt gehen und keine zwei zueinander parallel sind. Je zwei von vier solchen Geraden haben einen Schnittpunkt; das ergibt insgesamt sechs Schnittpunkte. Die ganze Konfiguration wird als (*vollständiges*) *Vierseit* bezeichnet. Die Geraden sind die *Seiten*, die Schnittpunkte von je zwei Seiten die *Ecken* des Vierseits.

Der Satz von Bodenmiller - Steiner beschreibt eine Eigenschaft von Vierseits. Deshalb sind noch einige hierzu gehörige Begriffe zu erläutern. Eine Ecke eines Vierseits ist Schnittpunkt von zwei Seiten des Vierseits; der Schnittpunkt der beiden anderen Seiten ist die *Gegenecke* zu erstgenannten. Beide Ecken zusammen bilden ein *Paar von Gegenecken*, ihre *Verbindungsstrecke* (! nicht ... gerade) ist eine *Diagonale* des Vierseits. Ein Vierseit hat demnach drei Paare von Gegenecken und drei Diagonalen. Zwei Ecken bilden genau dann ein Paar von Gegenecken, wenn sie nicht auf einer Seite liegen.

Die zweite Veränderung betrifft die eingangs angesprochene Kopunktalität von drei Geraden. Auch hier erhöht man den Grad der Kompliziertheit um „eine Stufe“; man geht von Geraden zu Kreisen über. Aber dabei wird die Situation sehr viel komplexer. Dem Sonderfall paralleler Geraden entspricht der Sonderfall konzentrischer Kreise, und statt zwei sich schneidender Geraden sind bei zwei Kreisen mit verschiedenen Mittelpunkten die drei Möglichkeiten des Schneidens in zwei Punkten, des Berührens in einem Punkt und des Meidens in Betracht zu ziehen.

Als technisches Hilfsmittel wird die Gleichung eines Kreises mit einer gegebenen Strecke als Durchmesser benötigt. Diese läßt sich leicht angeben. In vektorieller Form lautet die Kreisgleichung bekanntlich allgemein:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2. \quad (1)$$

Für die Gleichung eines Kreises, der die Verbindungsstrecke der durch die Ortsvektoren \mathbf{d} und \mathbf{e} gegebenen Punkte als Durchmesser hat, gilt $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{e})$ und $r^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{d} - \mathbf{e})^2$; durch Einsetzen erhält man daraus

$$\mathbf{x}^2 - (\mathbf{d} + \mathbf{e}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (2)$$

Es sei nun ein vollständiges Vierseit mit sechs eigentlichen Ecken gegeben. Der Satz von BODENMILLER behauptet, daß es zwei Punkte gibt, in denen sich die drei Thaleskreise über den Diagonalen schneiden; diese drei Kreise will ich fortan BODENMILLERSche Kreise nennen. Ich versche die Ebene mit einer Vektorraumstruktur derart, daß eine Ecke des Vierseits zum Ursprung wird. Die Ortsvektoren von zwei weiteren, auf den beiden durch den Ursprung gehenden Seiten des Vierseits gelegenen Ecken seien \mathbf{a} und \mathbf{c} ; sie bilden eine Basis des Vektorraumes. Die Ortsvektoren der anderen auf diesen Seiten gelegenen Ecken sind Vielfache von \mathbf{a} und \mathbf{c} , also von der Form $r \cdot \mathbf{a}$ und $s \cdot \mathbf{c}$ mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen r und s , die von 0 und 1 verschieden sind. Der Ortsvektor \mathbf{b} der Gegenecke zum Ursprung besitzt dann die Darstellung

$$\mathbf{b} = \frac{rs - r}{rs - 1} \cdot \mathbf{a} + \frac{rs - s}{rs - 1} \cdot \mathbf{c}. \quad (3)$$

Da die Geraden g_1, g_4 nicht parallel sind, sondern sich im Punkt A_{34} schneiden, ist $rs \neq 1$.

Für die BODENMILLERSchen Kreise erhält man durch Einsetzen in (2) die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_1 &= \bar{x}^2 - b \cdot \bar{x} &= 0, \\ P_2 &= \bar{x}^2 - (a + c) \cdot \bar{x} + a \cdot c &= 0, \\ P_3 &= \bar{x}^2 - (ra + sc) \cdot \bar{x} + rsa \cdot c &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Setzt man in (4) den errechneten Wert für b ein, so erkennt man

$$(rs - 1) \cdot P_1 = rs \cdot P_2 - P_3. \quad (5)$$

Algebraisch bedeutet das, daß das Verschwinden von zweien der Werte P_1, P_2, P_3 das Verschwinden des dritten nach sich zieht. In geometrischer Umsetzung erhalte ich, daß ein Schnittpunkt von zwei BODENMILLERSchen Kreisen auch auf dem dritten liegt. Damit ist der Satz von BODENMILLER in der schwachen Fassung bewiesen:

Wenn sich zwei der BODENMILLERSchen Kreise eines Vierseits in zwei verschiedenen (reellen) Punkten schneiden, so geht auch der dritte BODENMILLERSche Kreis dieses Vierseits durch diese zwei Punkte. Wenn sich zwei solche Kreise berühren, so hat dritte mit ihnen den Berührungspunkt, aber keinen anderen gemein. Meiden sich zwei dieser Kreise, so haben alle drei paarweise keinen Punkt gemeinsam.

Bemerkung. Die GUDERMANNsche Verallgemeinerung von Kreisen auf ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen ist bei diesem Ansatz eine Trivialität. Jede derartige Ellipsenschar bestimmt ein inneres Produkt. Man hat nur die Multiplikation in den angegebenen Gleichungen bezüglich dieses inneren Produktes zu interpretieren. \square

Die starke Fassung des Satzes von BODENMILLER würde komplexe Schnittpunkte mit einbeziehen; aber man kann diesen Sachverhalt doch noch ein ganzes Stück rein reell weiterbehandeln, was für eine Diskussion im Schulunterricht wesentlich ist. Dabei ist jedoch eine Unterstützung durch einen grafik-fähigen Computer sinnvoll. Es ist ja überhaupt erst zu klären, ob es möglich ist, daß sich die BODENMILLERSchen Kreise meiden oder berühren. Es stellt sich die Frage, ob die Konfiguration so abgeändert werden kann, daß sich die Thaleskreise über $[A_{13}A_{24}]$ und $[A_{14}A_{23}]$ meiden. Den Ausgangspunkt bildet die Bedingung für die Existenz reeller Schnittpunkte zweier Kreise: der Abstand der Mittelpunkte muß größer als die Differenz und kleiner als die Summe der Radien sein. Man müßte also etwa den Abstand der Mittelpunkte groß und die Radien klein machen. Ersteres erhält man bei der Wahl großer Werte für r und s , letzteres durch Verkleinern des Winkels zwischen den Vektoren a und c .

Der Fall des Berührens erfordert eine genauere Rechnung. Dabei ist der Ansatz einfach; die Umformungen sind aber so lästig, daß man sie für den allgemeinen Fall nur mit Hilfe eines Formelmanipulationsprogramms wie etwa *Derive* durchführen sollte. Man hat den Abstand der Mittelpunkte der Strecken $[A_{13}A_{24}]$ und $[A_{14}A_{23}]$ der halben Summe ihrer Längen, das ist die Summe der Radien der entsprechenden BODENMILLERSchen Kreise, gleichzusetzen.

Mathematikern liegt die Frage nahe, ob sich die gezeigten Fälle durch geometrische Bedingungen an Vierseite charakterisieren lassen. Dieses Problem wurde (meines Wissens) in der mathematischen Literatur bisher nicht behandelt.

Im Rahmen der leider aus dem Gymnasialunterricht verschwundenen Theorie der Kreisbüschel gibt es eine griffige, die Frage der nicht existierenden oder zusammenfallenden Schnittpunkte vermeidende Formulierung des Satzes von BODENMILLER:

Die BODENMILLERSchen Kreise eines vollständigen Vierseits gehören zu einem Kreisbüschel; dieses kann elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sein.

Aber auch ohne Einstieg in die Büscheltheorie kann man die dem Büschel angehörende Gerade betrachten. Im Fall der Existenz reeller Schnittpunkte handelt es sich um die Verbindungsgerade dieser Schnittpunkte, und es ist doch naheliegend, diese zu untersuchen. Sie genügt in Bezug auf die früher eingeführte Vektorraumstruktur der Gleichung

$$P_2 - P_3 = 0,$$

die äquivalent ist zu

$$((r-1)a + (s-1)c) \cdot \mathbf{x} = (rs-1)a \cdot c. \quad (6)$$

Nun kann man die Geradengleichung (6) offensichtlich auch aufstellen, wenn ein vorgelegtes Vierseit nicht so gutartig ist, wie das eben angenommene. Die Frage ist, ob die Gerade auch in diesen Fällen interessante geometrische Eigenschaften besitzt. Dafür habe ich in meinem Unterrichtsversuch zwei Möglichkeiten aufgezeigt, die kürzere nimmt Bezug auf einen Satz von JAKOB STEINER, die zeitaufwendigere bringt den nahezu vergessenen Potenzbegriff ins Spiel. Weil ich nicht wußte, wie es zeitlich ausgehen würde, habe ich den mir interessanter erscheinenden Satz von STEINER im Unterricht zuerst behandelt, obwohl von der mathematischen Systematik her das Thema der Potenz den Vorrang haben müßte; dies konnte ich aber dann auch noch ansprechen. Die notwendigen Grundlagen sollten aus der Elementargeometrie der Mittelstufe bekannt sein. Dann erkennt man, daß die durch die Gleichung (6) beschriebene Gerade für je zwei BODENMILLERSche Kreise die Potenzgerade darstellt und erhält die folgende starke, aber rein reelle Fassung des Satzes von BODENMILLER.

Die drei zu je zwei BODENMILLERSchen Kreisen eines vollständigen Vierseits gehörenden Potenzgeraden fallen zusammen.

Die gemeinsame Potenzgerade der BODENMILLERSchen Kreise eines Vierseits nennt man *Potenzgerade des Vierseits*. Mit diesem Begriff kann ich den Satz von JAKOB STEINER in einer einfachen Weise formulieren.

Die Höhenschnittpunkte der vier durch ein vollständiges Vierseit bestimmten Dreiecke sind kollinear, sie liegen auf der Potenzgerade des Vierseits.

Zum Beweis rechne ich mit der schon früher beschriebenen Vektorraumstruktur. Weil die Potenzgerade eines Vierseits durch ihre geometrische Ortseigenschaft unabhängig von der Vektorraumstruktur ist, genügt es, den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks zu betrachten. Wir wählen dazu das Dreieck $A_{12}A_{13}A_{23}$. Die Höhe durch A_{13} ist beschrieben durch die Gleichung

$$c \cdot \mathbf{x} = a \cdot c, \quad (7)$$

die Höhe durch A_{23} durch die Gleichung

$$a \cdot \mathbf{x} = sa \cdot c. \quad (8)$$

Man sieht nun sofort, daß ein Punkt, für den beide Gleichungen gelten, auch die Gleichung (6) der Potenzgeraden des Vierseits erfüllt.

Bemerkung. Der Satz von STEINER ging etwa gleichzeitig mit dem Satz von BODENMILLER in Druck. STEINER nimmt keinen Bezug auf den Satz von BODENMILLER, sondern stellt nur die Kollinearität der vier Höhenschnittpunkte fest und erkennt die entstehende Gerade als senkrecht zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der drei Diagonalen des vollständigen Vierseits; für die Kollinearität dieser drei Punkte beruft er sich auf NEWTONS *Principia Mathematica*. Die Verbindung dieser an sich unabhängigen Ergebnisse zum „Satz von BODENMILLER – STEINER“ beruht auf der Tatsache, daß Gerade, die nach STEINER die Höhenschnittpunkte der einem vollständigen Vierseit zugeordneten Dreiecke enthält, mit der Potenzgeraden des Vierseits nach BODENMILLER zusammenfällt. □

Im folgenden möchte ich nun dem modernen vektoriellen Beweis einige klassische Begründungen des Satzes von BODENMILLER gegenüberstellen. Die etwa von MÖBIUS hierzu angestellten Überlegungen ließen sich vom Schwierigkeitsgrad her schon in der 9. Jahrgangsstufe durchführen, sind aber doch sehr zeitraubend. Sobald der Satz von APOLLONIOS (262 – 190 v. Chr.) zur Verfügung steht, kann man jedoch einen Spezialfall recht einfach behandeln, nämlich der Satz von BODENMILLER für Vierseite, bei denen zwei der Diagonalen parallel sind. Hier setze ich die Parallelität der Geraden $A_{13}A_{24}$ und $A_{14}A_{23}$ voraus und behaupte als erstes, daß die dritte Diagonale, also die Gerade $A_{12}A_{34}$, die Strecken $[A_{13}A_{24}]$ und $[A_{14}A_{23}]$ halbiert, woraus folgt, daß die Schnittpunkte $E = A_{12}A_{34} \cap A_{13}A_{24}$ und $F = A_{12}A_{34} \cap A_{14}A_{23}$ die Mittelpunkte der entsprechenden BODENMILLERSchen Kreise sind. Um das einzusehen, betrachte ich die beiden zentrischen Streckungen, die die Strecke $[A_{13}A_{24}]$ in die Strecke $[A_{14}A_{23}]$ und damit den Punkt E in den Punkt F überführen. Die Streckungszentren sind A_{12} und A_{34} , die Streckungsverhältnisse sind gleich. Die Strecke $[A_{13}E]$ wird einerseits auf die Strecke $[A_{14}F]$ und andererseits auf die Strecke $[A_{23}F]$ abgebildet, also ist $\overline{A_{13}E} = \overline{A_{23}F}$ und damit auch $\overline{A_{13}E} = \overline{A_{24}F}$. Das beweist die Behauptung über die Mittelpunkte der BODENMILLERSchen Kreise mit den Durchmessern $[A_{13}A_{24}]$, $[A_{14}A_{23}]$. Darüberhinaus ergibt sich, daß die beiden genannten zentrischen Streckungen den einen dieser Kreise auf den andern abbildet und damit das Streckungsverhältnis $\overline{A_{13}E} : \overline{A_{14}F}$ mit dem Verhältnis der Radien übereinstimmt. Ein gemeinsamer Punkt der BODENMILLERSchen Kreise hat also von den Punkten E und F das Abstandsverhältnis $\overline{A_{13}E} : \overline{A_{14}F} = \overline{A_{12}E} : \overline{A_{12}F} = \overline{A_{34}E} : \overline{A_{34}F}$, liegt also auf dem zu diesem Abstandsverhältnis bezüglich der Punkte E, F gehörigen APOLLONIOSkreis. Auf der Geraden EF erfüllen aber gerade die Zentren der Streckungen mit diesem Verhältnis die entsprechenden Abstandsbedingungen, also ist die Strecke $[A_{12}A_{34}]$ ein Durchmesser des betrachteten APOLLONIOSkreises, das heißt der APOLLONIOSkreis fällt mit dem dritten BODENMILLERSchen Kreis zusammen. Damit ist die schwache Fassung des Satzes von BODENMILLER in diesem Spezialfall bewiesen.

Interessant ist, daß sich bei Vierseiten mit zwei zueinander parallelen Diagonalen die Fallunterscheidung des Schneidens, Berührens oder Meidens der BODENMILLERSchen Kreise einfach und mit den auch schon in der 9. Jahrgangsstufe zur Verfügung stehenden Mitteln klären läßt. Ich skizziere hier nur den Fall des Berührens unter der Annahme der Parallelität der Geraden $A_{13}A_{24}$ und $A_{14}A_{23}$. Dann liegen nämlich die Mittelpunkte der BODENMILLERSchen Kreise auf der Trägergeraden der dritten Diagonalen, das heißt der Geraden $A_{12}A_{34}$. Wenn sich nun die BODENMILLERSchen Kreise in einem Punkt berühren, so muß auch der Berührungspunkt auf dieser Geraden liegen. Damit muß der Berührungspunkt aber entweder auf den Punkt A_{12} oder auf den Punkt A_{34} fallen. Ersteres ist genau dann der Fall, wenn g_1 senkrecht zu g_2 ist, letzteres ist äquivalent zur Orthogonalität von g_3 und g_4 .

Dieser Spezialfall des Satzes von BODENMILLER bietet offensichtlich auch Stoff für Konstruktionsaufgaben, was wohl nicht näher ausgeführt zu werden braucht.

Eine der klassischen Begründungen des allgemeinen Satzes von BODENMILLER läuft über den sogenannten Satz von MONGE, benannt nach dem Erfinder der Darstellenden Geometrie, GASPARD MONGE (1746 – 1818). In seiner im Jahr VII der Republik erstmalig erschienenen *Géométrie descriptive* beweist MONGE

Sind drei Kreise mit nichtkollinearen Mittelpunkten und paarweise verschiedenen Radien gegeben, so sind kollinear

- die drei zu je zweien dieser Kreise gehörenden äußeren Streckungszentren und
- jedes der äußeren Streckungszentren mit zwei inneren Streckungszentren.

Die Behauptung des Satzes von MONGE liefert vier Geraden, die ein vollständiges Vierseit bilden, mit den sechs auftretenden Streckungszentren als Ecken. Jede Diagonale dieses Vierseits

verbindet ein äußeres Streckungszentrum mit dem zum selben Kreispaar gehörenden inneren Streckungszentrum; die Schnittpunkte der Diagonalen

$$E = A_{12}A_{34} \cap A_{13}A_{24},$$

$$F = A_{12}A_{34} \cap A_{14}A_{23},$$

$$G = A_{13}A_{24} \cap A_{14}A_{23}.$$

sind die Mittelpunkte der gegebenen Kreise. Auf Seite 132 des 11. Bandes der GERGONNESchen *Annales de Mathématiques* (erschienenen 1820) wurde – natürlich mit anderen Worten – die Aufgabe gestellt, die Behauptung des Satzes von BODENMILLER für vollständige Vierseite zu beweisen, die auf diese Weise entstehen. Eine Lösung haben der Mathematikprofessor am *Collège Royal* in Cahors (Midi-Pyrénées), JEAN-BAPTISTE DURRANDE (1798 – 1825), der sich – obwohl so jung verstorben – um die Elementarmathematik sehr verdient gemacht hat, und der Professor der „*Mathématiques spéciales*“ am Lyzeum in Nîmes (Languedoc-Roussillon), VECTEN angegeben. Bezeichne ich mit r_1, r_2, r_3 die Radien der gegebenen Kreise um E, F, G , so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\overline{EA_{12}}}{\overline{FA_{12}}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{EA_{34}}}{\overline{FA_{34}}} \quad (9)$$

$$\frac{\overline{EA_{13}}}{\overline{GA_{13}}} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{\overline{EA_{24}}}{\overline{GA_{24}}} \quad (10)$$

$$\frac{\overline{FA_{14}}}{\overline{GA_{14}}} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{\overline{FA_{23}}}{\overline{GA_{23}}} \quad (11)$$

Diese Gleichungen kann man nun aber geschickt interpretieren: Die BODENMILLERSchen Kreise sind APOLLONIOSKreise zu den Abstandsverhältnissen $\frac{r_i}{r_j}$ bezüglich je zweier der drei Punkte E, F, G . Für die Schnittpunkte P der BODENMILLERSchen Kreise mit den Durchmessern $[A_{12}A_{34}]$ und $[A_{23}A_{14}]$ gilt deshalb

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{FP}} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{\overline{FP}}{\overline{GP}} = \frac{r_2}{r_3}. \quad (12)$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{GP}} = \frac{r_1}{r_3}, \quad (13)$$

das heißt, ein solcher Punkt P liegt auch auf dem Kreis mit dem Durchmesser $[A_{13}A_{24}]$. Damit ist die schwache Fassung des Satzes von BODENMILLER für diese speziellen Vierseite bewiesen. Im Jahr 1881 bemerkte aber der damals 19-jährige Straßburger Student EDUARD STUDY, später Professor in Marburg, Greifswald und Bonn, daß sich zu jedem vollständigen Vierseit auf unendlich viele Arten Gruppen von drei Kreisen konstruieren lassen, in Bezug auf welche seine Ecken die Ähnlichkeitspunkte sind. Dazu braucht man allerdings den schon PAPPUS (um 300) bekannten Satz vom vollständigen Vierseit.

Auf jeder Diagonale eines vollständigen Vierseits trennen sich die beiden darauf liegenden Ecken und die Schnittpunkte mit den anderen beiden Diagonalen harmonisch.

Wir wählen einen beliebigen Kreis \mathfrak{K}_1 um E und konstruieren dazu zunächst den Kreis \mathfrak{K}_2 um F , der sich aus \mathfrak{K}_1 durch zentrische Streckung von A_{12} ergibt. Dann ist A_{12} äußeres und wegen der Eindeutigkeit des vierten harmonischen Punktes A_{34} inneres Ähnlichkeitszentrum der beiden Kreise. Als nächstes strecke ich \mathfrak{K}_2 zu einem Kreis um G vom Zentrum A_{23} aus; nun

folgt dann aber auch, daß die Punkte A_{13} und A_{24} die Ähnlichkeitszentren der Kreise \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 sind, und damit ist alles getan.

Nun kommt der berühmte MÖBIUS ins Spiel - oder ist vielleicht nur sein Enkel, der Neurologe und Verfasser des bahnbrechenden Werkes „Vom physiologischen Schwachsinn des Weibes“ wirklich berühmt? Letzteres Buch wurde immer wieder neu aufgelegt und ist noch heute im Buchhandel erhältlich. Dagegen wird man den „Baryzentrischen Kalkül“ des Großvaters nur schwerlich finden. Aber sei's wie es sei! Angeregt durch einen Vortrag des damals am Polytechnikum in Dresden tätigen OSKAR SCHLÖMILCH im Rahmen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig hat AUGUST FERDINAND MÖBIUS zwei Beweise des Satzes von BODENMILLER gegeben. Wie die Argumentation im vorigen Abschnitt beruht der erste Beweis von MÖBIUS auf der wegen des Satzes vom vollständigen Vierseit möglichen Interpretation der BODENMILLERSchen Kreise als APOLLONIOSKreise, vermeidet aber den Bezug auf den Satz von MONGE und verwendet stattdessen den auch in der 9. Jahrgangsstufe zu behandelnden Satz von MENELAOS (um 100 v. Chr.).

Schneidet eine Gerade die drei Seiten eines Dreiecks in drei paarweise verschiedenen Punkten, so ist das Produkt der (absoluten) Teilverhältnisse in zyklischer Reihenfolge gleich 1.

Nun bezeichne ich die Schnittpunkte der Diagonalen wieder mit E, F, G und schreiben die zugehörigen Verhältnisgleichungen auf. Der BODENMILLERSche Kreis mit dem Durchmesser $[A_{12}A_{34}]$ ist der geometrische Ort aller Punkte X mit

$$\frac{\overline{FX}}{\overline{EX}} = \frac{\overline{FA_{12}}}{\overline{EA_{12}}}. \quad (14)$$

Analog ist der BODENMILLERSche Kreis mit dem Durchmesser $[A_{13}A_{24}]$ der geometrische Ort aller Punkte X mit

$$\frac{\overline{EX}}{\overline{GX}} = \frac{\overline{EA_{13}}}{\overline{GA_{13}}} \quad (15)$$

und der BODENMILLERSche Kreis mit dem Durchmesser $[A_{14}A_{23}]$ ist der geometrische Ort aller Punkte X mit

$$\frac{\overline{FX}}{\overline{GX}} = \frac{\overline{FA_{14}}}{\overline{GA_{14}}}. \quad (16)$$

Wir betrachten nun die Gerade g_1 als Transversale des Dreiecks EFG . Dann liefert der Satz von Menelaos:

$$\frac{\overline{FA_{12}}}{\overline{EA_{12}}} \cdot \frac{\overline{GA_{14}}}{\overline{FA_{14}}} \cdot \frac{\overline{EA_{13}}}{\overline{GA_{13}}} = 1. \quad (17)$$

Damit ist die Gleichung (16) äquivalent zu

$$\frac{\overline{FX}}{\overline{GX}} = \frac{\overline{FA_{12}}}{\overline{EA_{12}}} \cdot \frac{\overline{EA_{13}}}{\overline{GA_{13}}}. \quad (18)$$

Nun sieht man sofort, daß ein Punkt X , für den zwei der Gleichungen (14), (15), (18) gelten, auch der dritten genügt, was wiederum die schwache Fassung des Satzes von BODENMILLER ergibt.

Die Vorgeschichte des Satzes von BODENMILLER reicht - wie schon gesagt - bis zu ISAAC NEWTON (1643 - 1727) zurück. Aber auch CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855) ist diesem Zusammenhang zu nennen. Er hat im Jahr 1810 bei der Bestimmung der größten Ellipse, die einem Viereck eingeschrieben werden kann, etwas Ähnliches wie Newton bewiesen: *Die Mittelpunkte aller Ellipsen, die einem vollständigen Vierseit mit sechs eigentlichen Ecken eingeschrieben werden können, liegen auf einer Geraden.* Interessant ist, daß GAUSS dabei für

die Darstellung der Seiten des betrachteten Vierseits im Prinzip die HESSEsche Normalform verwendet, obwohl LUDWIG OTTO HESSE (1811 – 1874) noch nicht geboren war. Wichtig für meine Überlegungen ist eine Folgerung, die GAUSS aus seinem Ergebnis zieht. Er bemerkt, daß man die Diagonalen eines vollständigen Vierseits mit sechs eigentlichen Ecken als Ellipsen der Dicke 0 auffassen kann, die alle vier Seiten berühren, also

Die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen auf einer Geraden.

Diese Aussage wird gelegentlich auch als GAUSSscher Satz bezeichnet und kann als Teil des Satzes von BODENMILLER angesehen werden: Wenn die drei BODENMILLERSchen Kreise eine Sehne gemeinsam haben, müssen ihre Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten zu dieser Sehne, also auf einer Geraden, liegen. Unser vektoralgebraischer Ansatz im zweiten Abschnitt zeigt unmittelbar, daß dies bei jeder Lage der BODENMILLERSchen Kreise der Fall ist und daß die durch die Gleichung 6 beschriebene Gerade immer senkrecht auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte steht. GAUSS selbst fand den Satz so bemerkenswert, daß er in seiner Arbeit noch „einen einfachen directen Beweis“ angab, der auf der Charakterisierung der Kollinearität von Punkten (x_1, x_2) , (y_1, y_2) , (z_1, z_2) der Ebene durch die Gleichung

$$x_1(y_2 - z_2) + y_1(z_2 - x_2) + z_1(x_2 - y_2) = 0$$

das ist die nennerlose Form der bekannten Bedingung an die Steigungen

$$\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} = \frac{z_2 - y_2}{z_1 - y_1}$$

beruht und zeigt, daß dieser Satz sogar schon in der 8. Jahrgangsstufe verständlich gemacht werden könnte. Im Jahr 1854 äußert sich SCHLÖMILCH zur Bedeutung des GAUSSschen Satzes:

Unter den verschiedenen merkwürdigen Eigenschaften des vollständigen Vierecks zeichnet sich der Gauss'sche Satz, dass die Mittelpunkte der drei Diagonalen in gerader Linie liegen, durch eine fast gänzlich isolierte Stellung aus, und es ist bis jetzt noch nicht bemerkt worden, zu welchem grösseren Abschnitte der neueren Geometrie er eigentlich gehört.

Unter den Folgerungen, die SCHLÖMILCH aus diesem Satz zieht, befindet sich auch der Satz von BODENMILLER, allerdings ohne Nennung des Namens. Darauf will ich hier nicht weiter eingehen, sondern stattdessen noch den zweiten Beweis von MÖBIUS skizzieren, der den GAUSSschen Satz verwendet und eine starke Fassung des Satzes von BODENMILLER liefert.

Die drei zu je zwei BODENMILLERSchen Kreisen eines vollständigen Vierseits gebildeten Potenzgeraden fallen zusammen.

Die Potenzgerade zweier nicht konzentrischer Kreise ist senkrecht zur Zentrale. Aus dem GAUSSschen Satz folgt damit, daß die drei Potenzgeraden zu je zwei BODENMILLERSchen Kreisen parallel sind. Es genügt also zum Beweis des Satzes von BODENMILLER nachzuweisen, daß diese Geraden einen Punkt gemeinsam haben. Dies zeigt MÖBIUS in seinem zweiten Beweis, wiederum bis auf den Sonderfall, in dem zwei Diagonalen des betrachteten Vierseits parallel zueinander sind. Wird dies ausgeschlossen, so bilden die Schnittpunkte E, F, G der Diagonalen ein Dreieck und MÖBIUS rechnet aus, daß der Umkreismittelpunkt M dieses Dreiecks auf jeder der drei Potenzgeraden liegt.